

Jeu de dés

Un kit du Mathscope UNIGE

Dans de nombreuses situations du quotidien, on raisonne spontanément avec des comparaisons du type :

« A est meilleur que B ».

Notre intuition nous pousse alors à penser que ces comparaisons sont **transitives** : si A est meilleur que B et B meilleur que C, alors A devrait être meilleur que C. En mathématiques, cette propriété est effectivement vraie pour certaines relations (par exemple « être plus grand que » pour des nombres), mais **elle n'est pas universelle**. Dans cette activité, les élèves vont explorer une situation de hasard dans laquelle « gagner contre » se révèle **non transitive**.

À travers une phase de jeu, les élèves vont produire des **données expérimentales**, puis analyser ces résultats à l'aide des outils des **statistiques**. Dans un second temps, ils construiront un **modèle probabiliste** permettant d'expliquer et de justifier rigoureusement les observations faites.

L'activité met ainsi en lumière :

- la différence entre **observer** et **calculer**
- le rôle du hasard dans les phénomènes aléatoires
- et le fait qu'un résultat contre-intuitif peut être parfaitement cohérent mathématiquement.

Table des matières

Organisation pratique	2
<i>Matériel nécessaire</i>	<i>2</i>
<i>Durée</i>	<i>2</i>
<i>Répartition de la classe et matériel par groupe</i>	<i>2</i>
Déroulé pratique.....	3
1. <i>Introduction et phase expérimentale (15 minutes)</i>	<i>3</i>
2. <i>Mise en commun des résultats (5-10 minutes).....</i>	<i>3</i>
3. <i>Probabilités vs statistiques : mise au clair (5 minutes).....</i>	<i>3</i>
4. <i>Calcul des probabilités de gain d'un dé contre un autre pour un lancer (10-15 minutes)</i>	<i>4</i>
5. <i>Conclusion collective (5 minutes).....</i>	<i>4</i>
6. <i>Pour aller plus loin</i>	<i>4</i>
Règles du jeu	5
<i>Objectif général.....</i>	<i>5</i>
<i>Règles communes (pour toutes les variantes).....</i>	<i>5</i>
<i>Mode exploration</i>	<i>5</i>
<i>Mode matchs.....</i>	<i>5</i>
Variante 1 – Nombre de lancers fixé	5
Variante 2 – Premier à N points.....	5
<i>À noter pendant le jeu</i>	<i>6</i>

Choix didactiques et éléments mathématiques	7
<i>Modalité exploration</i>	7
Point de vue mathématique	7
Intérêt pédagogique	7
Mathématiques travaillées	7
Utilisation de Mathlive	8
<i>Modalité matches</i>	8
1. Nombre de lancers fixé à l'avance (≈ 15 à 25)	8
2. Nombre de victoires fixé (premier à N points ($N \approx 10$ à 15))	9

Organisation pratique

Matériel nécessaire

Matériel à télécharger

- Fiche d'activité (ce document)
- Fichier Excel comportant 3 onglets

Matériel expérimental

- 25 jeux de trois dés : (NB : les dés sont parfaitement équilibrés)
 - Un **dé noir (N)** avec cinq faces 4 et une face 1
 - Un **dé bleu (B)** avec trois faces 5 et trois faces 2
 - Un **dé blanc (W)** avec une face 6 et cinq faces 3
- 1 jeu de 3 gros dés (pour avoir un deuxième exemple de set de dés non-transitifs)

Matériel pour noter les résultats

- Feuilles de papier (non fournies)
- OU
- Accès à un smartphone / tablette
 - Accès à l'outil de collecte de données *Mathlive* (préparé à l'avance par l'enseignant·e)
<https://mathlive.fr/fr/teacher/activityPage/intransitiveDice/6253d219e5ed28146fc41231/>

Durée

- **30 minutes** : expérimentation + discussion
- **45 minutes** : avec calculs de probabilités et mise en perspective statistique

On peut aussi prendre 2 périodes pour tester les deux variantes du modes matches (nb de lancers limités ou nb de lancers gagnants) et/ou le jeu avec 2 dés et éventuellement faire calculer les probabilités de gain pour chaque variante.

Répartition de la classe et matériel par groupe

On suggère de faire des **groupes de trois élèves faisant un tournus entre deux tâches**

- 2 élèves jouent
- 1 élève collecte les résultats

Il est possible de faire travailler les élèves en groupes de deux, mais la collecte du résultat brise un peu la dynamique de jeu.

Chaque groupe reçoit :

- 1 lot de 3 dés non-transitifs
- un support pour consigner les résultats (papier ou numérique)

Déroulé pratique

Ce déroulé permet uniquement d'arriver au calcul de la probabilité de gain d'un dé contre un autre. Pour établir les probabilités de gain d'un match selon la variante choisie, il faut prévoir plus de temps.

1. Introduction et phase expérimentale (15 minutes)

- Annoncer que l'activité commence par **un jeu**, sans chercher d'explication au départ
- Organiser la classe en **groupes de trois élèves**
- Dans chaque groupe :
 - **2 élèves jouent** (un dé chacun)
 - **1 élève observe et note les résultats** (secrétaire)
- Expliquer que les rôles **tournent régulièrement** afin que chacun-e joue et note
- Énoncer la consigne (choisir la modalité et la variante le cas échéant) et lancer le jeu
 - Chacun des deux élèves-joueurs choisit un dé parmi N, B et W. Le troisième dé est écarté
 - Les deux dés sont lancés simultanément ; le plus grand score gagne.
 - Le ou la secrétaire **note le résultat de chaque lancer**.
- Après quelques lancers ou le premier match, suivant la variante choisie, demander aux joueur-euses d'**observer les résultats notés**
- Inviter à **changer de dé** en fonction des tendances observées
- Insister sur le fait que les notes prises constituent des **données** pour la suite de l'activité
- Poursuivre l'expérimentation afin que toutes les paires de dés soient testées

2. Mise en commun des résultats (5-10 minutes)

- Mettre en commun les résultats (oralement ou via l'outil numérique). A la suite de la phase expérimentale, les élèves devraient observer que :
 - N bat B,
 - B bat W,
 - W bat N.
- Évoquer en demandant aux élèves le jeu **ShiFuMi** (pierre-feuille-ciseaux) où
 - pierre bat ciseaux,
 - ciseaux battent feuille,
 - feuille bat pierre.
- Discussion sur la transitivité et la non-transitivité.
- Discussion sur les faits suivants :
 - les élèves produisent des **données expérimentales**
 - les conclusions reposent sur des **fréquences observées**

3. Probabilités vs statistiques : mise au clair (5 minutes)

Discussion structurée autour de deux idées clés :

- **Statistiques**
 - issues de l'expérience, dépendent du nombre de lancers
 - peuvent varier d'un groupe à l'autre
- **Probabilités**
 - calculs théoriques fondés sur un modèle (les dés sont équilibrés)
 - résultats exacts et indépendants de l'expérience

4. Calcul des probabilités de gain d'un dé contre un autre pour un lancer (10–15 minutes)

- Travail en classe entière ou par groupes
 - Construction pour chaque paire de dés :
 - d'un **tableau à double entrée** ou
 - d'un **arbre de probabilités**
 - Calcul des probabilités exactes de victoire d'un dé sur un autre pour un lancer
 - Comparaison avec les résultats statistiques obtenus expérimentalement
-

5. Conclusion collective (5 minutes)

- Mise en évidence de la convergence :
 - Quand le nombre d'expériences augmente, les statistiques se rapprochent des probabilités (Loi des grands nombres). Notez que parfois le nombre de résultats obtenus par la classe n'est pas assez grand pour observer ce phénomène.
 - Rôle du calcul
 - l'expérience suggère des résultats,
 - les résultats expérimentaux sont confirmés par le calcul.
-

6. Pour aller plus loin

- Dans le kit, vous trouverez trois gros dés qui représentent un autre set de dés non transitifs. N'hésitez pas à les comparer avec les dés utilisés.
- Vous pouvez tester la variante à deux dés. Chaque joueur·euse choisit deux dés de la même couleur. Le gagnant du lancer est celui ayant obtenu la plus grande somme entre ses deux dés. Vous pourrez observer que les probabilités de gain s'inversent. Dans le cas avec deux dés :
 - B bat N
 - W bat B
 - N bat W
- Vous pouvez toujours utiliser Mathlive pour recueillir les résultats. Dans le fichier Excel, vous trouverez les probabilités de gain pour chaque jeu.
- Les dés proposés proviennent d'un exemple donné par James Grime sur son site : <https://singingbanana.com/dice/article.htm>. Vous y trouverez aussi un exemple à cinq dés.

Règles du jeu

Objectif général

Comparer deux dés en les lançant plusieurs fois et observer lequel gagne le plus souvent.

Pour cela, on propose deux modalités de jeu : exploration ou matchs.

Règles communes (pour toutes les variantes)

- Chacun·e des deux élèves-joueur·euse choisit **un dé**.
 - Les deux joueur·euses lancent leur dé **en même temps**.
 - Le nombre **le plus grand gagne** le lancer.
-

Mode exploration

Les élèves peuvent jouer librement avec les dés sans but précis. Uniquement pour expérimenter et faire les premières observations. Le but est de se rendre compte de la non-transitivité de la relation « dé A bat dé B ». Les résultats de chaque lancer sont consignés (en format écrit ou numérique). Cette modalité permet de dégager la probabilité de gain d'un dé pour chaque paire de dés donnée.

Mode matchs

Dans ce mode de jeu, les élèves s'affrontent en duel : chaque partie aboutit à un gagnant et un perdant. Cette modalité permet de mettre en évidence deux types de probabilités. D'une part, en notant le résultat de chaque lancer, on peut estimer la probabilité qu'un dé gagne contre un autre pour une paire de dés donnée. D'autre part, en notant le gagnant de chaque partie, on peut étudier la probabilité de gagner une partie selon les règles choisies, qui est une probabilité différente de celle associée à un lancer isolé.

Cette modalité permet aussi de motiver des élèves qui seraient moins enclins à participer à une phase purement exploratoire et libre.

On vous propose deux règles de jeu qui permettent de travailler sur deux approches différentes du calcul de probabilité (voir le paragraphe sur les variables didactique).

Variante 1 – Nombre de lancers fixé

Comment joue-t-on ?

1. L'enseignant·e annonce le **nombre total de lancers**
2. Les joueur·euses effectuent exactement ce nombre de lancers.
3. À chaque lancer gagné, on note une victoire pour le dé correspondant.
4. À la fin, on compte le nombre de victoires de chaque dé.

Qui gagne ?

- Le dé qui a gagné **le plus de lancers** gagne la partie.
-

Variante 2 – Premier à N points

Comment joue-t-on ?

1. L'enseignant·e annonce le **nombre N de points à atteindre**.
2. Les joueur·euses commencent à lancer leurs dés.
3. À chaque lancer gagné, le ou la joueur·euse marque 1 point.
4. La partie continue jusqu'à ce qu'un·e joueur·euse atteigne N points.
5. Dès qu'un·e joueur·euse atteint N points, la partie s'arrête.

Qui gagne ?

- Le ou la joueur·euse qui **atteint N points en premier** gagne la partie.

À noter pendant le jeu

Pour chaque lancer, on note :

- le **dé gagnant du lancer**

Dans la modalité matchs, on note à la fin de chaque partie :

- le **nombre de victoires** de chaque dé,
- le **nombre total de lancers** effectués.

Ces informations serviront à comparer les résultats avec ceux des autres groupes.

Choix didactiques et éléments mathématiques

Modalité exploration

Dans cette modalité, les élèves recensent uniquement les résultats des différents lancers. Cela permet de recueillir un grand nombre d'expériences afin de déterminer la probabilité de gain pour chaque couple de dés.

Point de vue mathématique

- On travaille sur un échantillon assez grand.
- Les élèves observent un nombre de victoires, dont il faudra déduire une **fréquence** :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre de victoires}}{\text{nombre total de lancers}}$$

- Cette fréquence est une **estimation statistique** de la probabilité théorique de gain d'un dé contre un dé donné.
- Dans le cas de l'outil numérique, la fréquence est calculée automatiquement sur l'ensemble des lancers enregistrés.
- Dans le cas du relevé manuel, l'enseignant-e décide à quel moment calculer la fréquence. La fréquence peut être calculée par chaque groupe sur les lancers qu'il a effectué ou par la classe à la fin du recueil de données et sur l'ensemble des lancers effectués. Il peut être intéressant de faire les deux et de commenter les éventuelles différences.

Intérêt pédagogique

- Facilite l'introduction de la loi des grands nombres (de manière qualitative).
- Met en évidence les **fluctuations statistiques** pour des échantillons de taille modérée, notamment si les deux calculs sont effectués (par groupe ou sur l'ensemble des résultats).
- Favorise une transition claire vers le calcul de probabilités exactes.

Mathématiques travaillées

Pour calculer la probabilité de gain d'un dé contre un autre dé donné, on peut construire

- un tableau à double entrée ou
- un arbre de probabilités

Le tableau à double entrée recense l'ensemble des issues possibles. En comptant les issues pour chaque dé et en divisant par le nombre d'issues possibles (36), on obtient la probabilité de gain d'un dé donné contre un autre. Un exemple est donné ici et vous trouverez dans le fichier Excel les tableaux pour toutes les paires de dés.

Noir/Bleu	4	4	4	4	4	1
5	N	N	N	N	N	N
5	N	N	N	N	N	N
5	N	N	N	N	N	N
2	B	B	B	B	B	N
2	B	B	B	B	B	N
2	B	B	B	B	B	N

	Dé Noir (N)	Dé Bleu (B)
Total	21	15
Probabilité	$21/36 \approx 58,33\%$	$15/36 \approx 41,67\%$

Utilisation de Mathlive

L'application Mathlive conçue pour donner le nombre effectif de lancers et les fréquences de gain.

Vous pouvez choisir soit le mode « Nombre de lancers limité » pour que les élèves fassent un nombre fixé de lancers, en choisissant pour chaque lancer les dés utilisés, soit le mode « Nombre de lancers illimité » pour les laisser totalement libre d'explorer et de s'arrêter lorsqu'ils le souhaitent.

Modalité matches

Lors de la modalité matches, l'enseignant·e peut choisir entre **deux variantes** qui n'induisent pas les mêmes types de raisonnements mathématiques. Si la modalité matches est utilisée pour stimuler les élèves à l'exploration, se référer à la Modalité exploration.

1. Nombre de lancers fixé à l'avance (≈ 15 à 25)

Description

Chaque groupe d'élèves effectue un nombre identique de lancers, puis observe la fréquence de victoire de chaque couple de dé. Le calcul se fait à l'aide d'une loi binomiale.

Pour déterminer le nombre de lancers, on conseille un nombre impair, afin d'éviter les matches nuls entre 15 et 25. Sur le fichier Excel, vous trouverez un tableau référençant pour chaque paire de dés, la probabilité de gain en fonction du nombre de lancers. Cette probabilité pourra aussi être calculée par la suite par les élèves

Point de vue mathématique

- On travaille sur un échantillon de taille fixée.
- Les résultats sont directement comparables entre groupes.
- Les élèves observent une **fréquence** :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{nombre de victoires}}{\text{nombre total de lancers}}$$

- Cette fréquence est une **estimation statistique** de la probabilité théorique de gain d'un match.

Intérêt pédagogique

- Facilite l'introduction de la loi des grands nombres (de manière qualitative).
- Met en évidence les **fluctuations statistiques** pour des échantillons de taille modérée.
- Favorise une transition claire vers le calcul de probabilités exactes.

Mathématiques travaillées

Dans le cas du nombre de lancers fixé à l'avance, la probabilité de gain d'un match est donnée par la **loi binomiale**. Notons p la probabilité de gain du dé A contre le dé B lors d'un lancer et N le nombre total de lancers. Dans ce cas, le dé A doit gagner au moins $[N/2] + 1$ matches où $[a]$ est la partie entière de a . Notons m ce nombre. Ainsi, la probabilité de gain est donnée par :

$$P(\text{dé A bat dé B}) = \sum_{k=m}^N \binom{n}{k} p^k (p-1)^{n-k}$$

Notons que pour faire le calcul, il faudra auparavant déterminer la probabilité p pour chaque paire de dés.

Utilisation de Mathlive

L'application Mathlive est normalement faite pour que les élèves introduisent le résultat de chaque lancer. Si vous souhaitez l'utiliser pour estimer la probabilité de gain sur un match avec un nombre

de lancers fixés, choisissez la modalité « Nombre de lancers limité » et fixez le nombre de parties que les élèves doivent jouer (par exemple 3 pour qu'ils expérimentent chaque paire de dés). Les élèves devront ensuite entrer **uniquement le résultat de chaque match** (et non de chaque lancer).

2. Nombre de victoires fixé (premier à N points ($N \approx 10$ à 15))

Description

La partie s'arrête lorsqu'un des joueurs atteint N victoires. Le nombre total de lancers est alors variable.

Pour déterminer le nombre de lancers à atteindre, on conseille un nombre compris entre 10 et 15. Sur le fichier Excel, vous trouverez un tableau référençant pour chaque paire de dés, la probabilité de gain en fonction du nombre de lancers. Cette probabilité pourra aussi être calculée par la suite par les élèves

Point de vue mathématique

- On ne fixe plus la taille de l'échantillon, mais un **seuil de succès**.
- Le nombre total de lancers devient une **variable aléatoire**.
- Les élèves observent indirectement que :
 - un dé plus favorable atteint plus vite le seuil,
 - le temps (ou le nombre d'essais) pour atteindre N victoires est lui-même informatif.

Intérêt pédagogique

- Met en lumière une autre manière de mesurer l'avantage d'une stratégie : non pas par une fréquence, mais par une **rapidité de réussite**.
- Introduit implicitement des idées liées aux **temps d'attente** et aux processus aléatoires.
- Approche plus ludique, mais mathématiquement plus subtile.

Mathématiques travaillées

Dans la variante « **nombre de lancers gagnants** » (par exemple *premier à 10 points*), on ne fixe plus le nombre total de lancers : on fixe un **seuil de victoires**. Le nombre de lancers nécessaires devient donc **variable**.

Notons

- p : probabilité que le dé A gagne **un lancer** contre le dé B (donc $1 - p$ pour B).
- r : nombre de points à atteindre pour gagner la partie.

Pour que A gagne la partie, il doit obtenir sa **r -ième victoire** avant B.

Cela signifie que lorsque la partie s'arrête :

- A a exactement r victoires,
- B a un nombre j de victoires **entre 0 et $r - 1$** ,
- et le **dernier lancer** est nécessairement une victoire de A.

Si B a j victoires au moment où A atteint r , alors le nombre total de lancers est

$$n = r + j.$$

Avant le dernier lancer (qui est gagné par A), il y a eu $n - 1 = r + j - 1$ lancers, pour lesquels :

- A a gagné $r - 1$ fois,
- B a gagné j fois.

Avant le dernier lancer, on a donc une loi binomiale classique avec

- $r + j - 1$ tirages
- un nombre de cas favorable égal à $r - 1$
- et par conséquent, un nombre de cas défavorables de $(r + j - 1) - (r - 1) = j$

$$\binom{r+j-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^j$$

Notons que dans notre raisonnement, on a laissé j fixe. Or, ce j , qui représente le nombre de lancers gagnés par B peut varier entre 0 et $r-1$. Pour que le calcul soit correct, il faut considérer que B gagne **au plus** $r-1$ fois. On a ainsi :

$$P(A \text{ gagne } r-1 \text{ fois et } B \text{ au plus } r-1 \text{ fois}) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r+j-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^j$$

Avec le dernier lancer, A gagne. Ainsi, pour obtenir la probabilité de gain de A, il faut multiplier la probabilité précédente par p . On a donc :

$$P(A \text{ gagne la partie}) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r+j-1}{r-1} p^r (1-p)^j$$

Utilisation de Mathlive

Le mode « Nombre de lancers gagnants » de Mathlive est spécialement conçu pour cette variante. L'enseignant·e fixe le nombre de lancers à atteindre et les élèves, après avoir choisi la paire de dés qui s'affrontent, renseignent le résultat de chaque lancer. La partie s'arrête dès que le nombre de lancers est atteint. Ils peuvent ensuite rejouer un autre match.

Pour l'affichage, l'enseignant·e a le choix entre l'affichage des résultats des lancers (« Total des résultats des lancers ») ou l'affichage des résultats des matchs (« Victoire des matchs »). On peut ainsi faire remarquer que les résultats sont différents. Ce double regard permet aux élèves de comprendre que le hasard ne se résume pas à un seul protocole expérimental, et que le choix d'un protocole influence la manière dont on interprète et on calcule les résultats.